دانشگاه زنجان

دانشکده مهندسی

گروه برق

پایان نامه کارشناسی

گرایش مخابرات

عنوان پروژه :

حل مسائل الکترومغناطیس با استفاده از تبدیلات برداری

استاد راهنما :

دکتر حبیب اله زلفخانی

تهیه کننده :

پریچهر فیضمندیان

شهریور ۹۱

فهرست

"چکیده"

این پروژه مسائل الکترومغناطیس را در سه مختصات کارتزین، استوانه ای و کروی بررسی می کند.

در فصل اول چند تبدیل برداری معرفی می شوند و طرز استفاده از آنها با یک مثال روشن خواهد شد.

در فصل دوم صورت مسأله جدیدی تعریف خواهد شد که لزوم استفاده از مختصات استوانه ای را مشخص خواهد کرد.لذا در فصل مذکور با تعریف شرایط متعارف، مسأله را به صورت پارامتری حل خواهیم کرد سپس برای اینکه هدف کار بیشتر مشخص شده و روند کار ملموس تر باشد با اختصاص مقادیر عددی به حل دوباره آن خواهیم پرداخت.

با انتقال جوابهای مسأله در حالت عددی به مختصات کروی و ساده سازی جوابها به نتیجه اصلی نزدیک خواهیم شد.

این روند نشان خواهد داد که منبع نقطه ای که در مختصات کارتزین در نظر گرفتیم به مانند آنتنی است که در فضای سه بعدی و در مختصات کروی تشعشع می کند.

"مقدمه"

در این پروژه حل مسائل الکترومغناطیس را در سه مختصات بررسی خواهیم کرد و با معرفی و استفاده از برخی از تبدیلات برداری به حل قسم خاصی از مسائل خواهیم پرداخت.

فرض میکنیم سطحی داریم که در جهت های ترانسورس نامحدود بوده اما در جهت z محدود و لایه لایه است.این نوع هندسه در آنالیز آنتنهای پچ[1] مورد استفاده قرار می گیرد.نواحی بالا و پایین توزیع جریان ممکن است همان پارامترهای تشکیل دهنده را داشته باشد.برای مثال این مسئله می تواند جریانی باشد که در مرز یک دی الکتریک وجود دارد و یا ممکن است یک دوقطبی باشد که در فضای آزاد قرار دارد،در z=0 ،موازی با صفحه xy.

با مشتق گیری مناسب،مؤلفه های ترانسورس میدان های الکتریکی و مغناطیسی بدست آمده و با اعمال شرایط مرزی مسئله حل می شود.نکته مهم اینجاست که درک و استفاده از گرین فانکشن ها[2] سرعت محاسبات را بالا می برد.

راه حل های گرین فانکشن برای جریانها در مرز سطوح وجود دارد که باتخصیص شرایط مرزی الکترومغناطیسی حل می شوند و سالهاست که شناخته شده هستند.

ارزشی که این رویه دارد،روشن کردن این نکته است که مؤلفه های طولی میدان الکتریکی و مغناطیسی بصورت تکی به دیورژانس دوبعدی و کرل شرایط مرزی مربوطند.

[1] patch
[2] green's functions.

همانطور که مسائلی که در جهت ترانسورس[1] نامحدود هستند مکرراً حل می شوند، توسط تعیین دیورژانس دو بعدی و کرل برای مختصات کارتزین، ما هم یک فرمول بندی جدید را معادل شرایط مرزی بدست آوردیم. واضح است که منبع ترانسورس، مؤلفه های طولی میدان الکتریکی و مغناطیسی را تحریک می کند و چیزی که بدیهی است این است که مؤلفه های میدان الکتریکی در جهت z به دیورژانس دو بعدی جریان سطحی وابسته، در حالی که مؤلفه های میدان مغناطیسی در جهت z به کرل دو بعدی جریان سطحی وابسته است.

بعضی از تبدیلات برداری مهم برای حل مسائل الکترومغناطیس توسط چو[2] و حبشی[3] در مقاله "استفاده از تبدیلات برداری در حل برخی از مسائل الکترومغناطیس"در سال ۱۹۸۶ معرفی شده است.

در این پروژه پس از حل یک مسئله با در نظر گرفتن یک منبع نقطه ای در فضای آزاد، در مختصات کارتزین، آن را ابتدا به مختصات استوانه ای،سپس به مختصات کروی برده و نتایج بدست آمده را طی حل مسئله بیان خواهیم کرد.

این پایان نامه شامل دو فصل مجزا است که فصل اول به بررسی و معرفی برخی از تبدیلات برداری و نحوه استفاده از آن در این مورد خاص می پردازد و فصل دوم حل مسئله نمونه را ابتدا در مختصات استوانه ای و سپس در مختصات کروی نشان خواهد داد و در انتهای فصل ۲ الگوهای تشعشی میدانها را به نمایش خواهیم گذاشت.

[1]. transverse
[2]. Chew
[3]. Habashy

فصل ۱ : قاعده تحلیلی مسأله و معرفی برخی تبدیلات برداری

۱–۱ روش تحلیلی مسأله

جزئیات برای مقدمه شروع این نوع هندسه در مرجع شماره ۴ ذکر شده است . با پیروی از قراردادی مشابه و توجه به اینکه اندیس (t) جهت ترانسورس [۱] را مشخص می کند ، میدان های ترانسورس بر حسب مؤلفه های z میدان های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر بیان می گردد:

*یک نکته که در اینجا قابل ذکر است این است که روابط زیر از تساوی های کرل ماکسول در یک محیط بدون منبع حاصل شده اند که در اینجا تنها به بیان معادلات ماکسول بسنده کرده و در فصل آتی ، نحوه به دست آوردن آن را نشان خواهیم داد .

$$\nabla \times \overline{E} = -jw\mu\overline{H} \qquad (۱-۱)$$

$$\nabla \times \overline{H} = +jw\varepsilon\overline{E} \qquad (۲-۱)$$

میدان های ترانسورس :

$$\overline{E}_t = \frac{1}{K_t^2}\left[\nabla_t \frac{\partial}{\partial_z} E_z + jw\mu\hat{a}_z \times (\nabla_t H_z)\right] \qquad (۳-۱)$$

$$\overline{H}_t = \frac{1}{K_t^2}\left[\nabla_t \frac{\partial}{\partial_z} E_z - jw\varepsilon\hat{a}_z \times (\nabla_t E_z)\right] \qquad (۴-۱)$$

در این معادلات ، k ، عدد موج را نشان می دهد و چون در مختصات کارتزین روابط را بررسی می کنیم مقدار آن برابر مجموع مجذور k_x, k_y خواهد بود . پس داریم :

---

[۱] Transverse .

$$K_t^2 = K_x^2 + K_y^2 \qquad (۱-۵)$$

برای ساده کردن روابط ۴ و ۳ می توانیم از تبدیل فوریه دو بعدی استفاده کنیم:

$$\tilde{\bar{E}}(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{E}(x, y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dxdy \qquad (۱-۶)$$

و عکس تبدیل :

$$\bar{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\bar{E}}(k_x, k_y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dk_x dk_y \qquad (۱-۷)$$

با مشتق گیری نسبت به مختصات ترانسورس معادلات ۳ و ۴ به صورت زیر درمی آیند :

$$\tilde{E}_x = \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \left(-jk_x \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial_z} - w\mu k_y \tilde{H}_z \right)$$

$$\tilde{E}_y = \frac{-1}{k_x^2 + k_y^2} \left(jk_y \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial_z} - w\mu k_x \tilde{H}_z \right)$$

$$\tilde{H}_x = \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \left(-jk_x \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial_z} + w\varepsilon k_y \tilde{E}_z \right)$$

$$\tilde{H}_y = \frac{-1}{k_x^2 + k_y^2} \left(jk_x \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial_z} - w\varepsilon k_y \tilde{E}_z \right)$$

که در فرم ماتریسی خواهیم داشت :

میدان الکتریکی ترانسورس :

$$\begin{bmatrix} +\tilde{E}_x \\ -\tilde{E}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_t^2} \begin{bmatrix} -jk_x & +jk_y \\ +jk_y & +jk_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial_z} \\ jw\mu \tilde{H}_z \end{bmatrix} \qquad (۱-۸)$$

میدان مغناطیسی ترانسورس :

$$\begin{bmatrix} +\tilde{H}_x \\ -\tilde{H}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_t^2} \begin{bmatrix} -jk_x & +jk_y \\ +jk_y & +jk_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial_z} \\ -jw\mu \tilde{E}_z \end{bmatrix} \qquad (۱-۹)$$

برای آماده سازی برای بخش بعد، تفاوت های موجود در شرایط مرزی در مؤلفه های میدان مغناطیسی ، دقیقاً بالا و پایین سطح به صورت زیر است :

(۱۰-۱)

$$\begin{bmatrix} +(H_x^+ - H_x^-) \\ -(H_y^+ - H_y^-) \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_t^2} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} \begin{bmatrix} -jk_x & jk_y \\ jk_y & jk_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{H}_z^+}{\partial_z} - \frac{\partial \tilde{H}_z^-}{\partial_z} \\ -(jw\varepsilon^+ \tilde{E}_z^+ - jw\varepsilon^- \tilde{E}_z^- \end{bmatrix} dk_x dk_y$$

۱-۲ فرمول بندی جدید شرایط مرزی

فرض می کنیم جریان سطحی بین دو لایه در مرز قرار داشته باشد ، پیوستگی میدان های مغناطیسی مماسی برای محاسبه جریان سطحی استفاده می شود ، چنانکه داریم :

$$\hat{a}_z \times (\overline{H}_t^+ - \overline{H}_t^-) = \bar{J}S \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

این شرط مرزی بنیادی باید برای هر مسأله ای در هندسه پله به پله ما اجرا شود . به این نکته هم باید توجه کرد که میدان های الکتریکی مماس نیز در مرز و در غیاب جریان سطحی مغناطیسی پیوسته هستند .

یک منظره کلی از شرایط مرزی فوق با نوشتن تئوری برداری هلم هولتز[۱] (در دو بعد) در نظر گرفته ایم . هر برداری ، به طور کامل توسط دیورژانس و کرلش مشخص می شود . دیورژانس و کرل دو بعدی شرایط مرزی برابر است با :

دیورژانس شرایط مرزی :

$$\nabla t.(\hat{a}_z \times (\overline{H}_t^+ - \overline{H}_t^-)) = \nabla t.\bar{J}S \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

---

۱. helm holtz

کرل شرایط مرزی :

$$\nabla t \times (\hat{a}_z \times (\bar{H}_t^+ - \bar{H}_t^-)) = \nabla t \times \bar{J}S \qquad (۱۳-۱)$$

برای نتایج حاصل از این مقاله ، استفاده از این معادلات در فرمت های مؤلفه های طولی میدان های الکتریکی و مغناطیسی بسیار مفید است .

از قانون آمپر و رفتار سلونوئیدی چگالی شار مغناطیسی ، ما به وضوح برای محیط های همگن و ایزوتروپیک داریم :

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = jw\varepsilon \vec{E}_z \qquad (۱۴-۱)$$

$$\nabla_t . \vec{H}_t = -\frac{\partial}{\partial_z} H_z \qquad (۱۵-۱)$$

اگر از روابط زیر استفاده کنیم :

$$\nabla_t \times (\hat{a}_z \times \bar{A}_t) = \hat{a}_z (\nabla_t . \bar{A}_t) \qquad (۱۶-۱)$$

$$\nabla_t . (\hat{a}_z \times \bar{A}_t) = -\hat{a}_z . (\nabla_t \times \bar{A}_t) \qquad (۱۷-۱)$$

اگر رابطه ۱۱ را در معادلات فوق قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\nabla_t . (\hat{a}_z \times (\bar{H}_t^+ - \bar{H}_t)) = \nabla_t . \bar{J}S = -\hat{a}_z (\nabla_t \times (\bar{H}_t^+ - \bar{H}_t^-))$$

$$\nabla_t \times (\hat{a}_z \times (\bar{H}_t^+ - \bar{H}_t)) = +\hat{a}_z (\nabla_r . (\bar{H}_t^+ - \bar{H}_t^-)) = \nabla_t \times \bar{J}S$$

$$(-jw(\varepsilon^+ E_z^+ - \varepsilon^- E_z^-)) = \nabla_t . \bar{J}S \qquad (۱۸-۱)$$

$$\hat{a}_z (-(\frac{\partial}{\partial_z} H_z^+ - \frac{\partial}{\partial_z} H_z^-)) = \nabla_t \times \bar{J}S$$

$$\frac{\partial H_z^+}{\partial_z} - \frac{\partial H_z^-}{\partial_z} = \nabla_t . (\hat{a}_z \times \bar{J}S) \qquad (۱۹-۱)$$

شرط مرزی برای میدان های مغناطیسی مماسی ، اکنون از نقطه نظر ناپیوستگی مؤلفه های z میدان های الکتریکی و مغناطیسی حاصل شد .

این نگرش، واقعیتی را آشکار می کند که نتیجه دید کلی بر شرط مرزی است که در ترم های دیورژانس و کرل دو بعدی نوشته شده است .

نتیجه گیری

دو شکلی که در قسمت آخر فصل دو ارائه شد ، الگوی تشعشعی آنتن را به ازای θ های مختلف نشان می دهد .

هدف کلی این مقاله بررسی تبدیل های برداری در مختصات کارتزین بود . ما با ارائه این تبدیلات ، به گسترش موضوع پرداختیم .

در بخش ۴ ، با در نظر گرفتن یک منبع نقطه ای ، مسأله را به انتها رساندیم و با انتقال جواب های آخر به مختصات کروی نشان دادیم که این منبع نقطه ای مانند یک آنتن در فضای سه بعدی تشعشع می کند.

میدان های الکتریکی و مغناطیسی را برای مقادیر مختلف θ محاسبه نمودیم ، الگوی تشعشعی را به ازای اندازه میدان الکتریکی و اندازه میدان مغناطیسی برای هر θ ارائه کردیم.

بنابراین مسأله ارضای شرایط مرزی مؤلفه های z میدان های الکتریکی و مغناطیسی در سطح به همراه منابع ترانسورس مورد بررسی قرار گرفت .

راه حلی که در این مقاله ارائه شد در نوع خود یکتا بود به طوری که شرایط مرزی میدان های ترانسورس را تجزیه می کرد ، در حالتی که با تجزیه میدان های نواحی همگن و بدون منبع سازگار بود .

این تجزیه امکان تعیین E_z, H_z در مرز را ایجاد کرد .

از آنجایی که مؤلفه های ترانسورس میدان ها با مشتق گیری از مؤلفه های z به دست آمدند . کل راه حل شناخته شده خواهد بود . این رویه که خلاصه ای از بررسی شرایط مرزی بود در این مقاله اشاره شده سازگاری آن را با تبدیل برداری نشان می دهد . بنابراین چنین تبدیلاتی از نتایج این مقاله، استخراج می شوند .

برای مثال ، سیستم مختصات استوانه ای ارضا شده و تبدیل برداری هنکل[12] که از رفتار مقید میدان های در جهت z حاصل شده بود .

در نتیجه ، برای نشان دادن روند این توضیحات ، مثال حلقه جریان حل شد ، جواب های هماهنگ با نتایج تحلیلی حاصل شد.

[12] Hankel

«منابع و مراجع»

[1]J.R. Jannes and P.S. Hall, Handbook of Microstrip Antennas . London, u.k. : Peregrinus, 1989, vol.I and II.

[2]D.Pozar, "Input impedance and mutual coupling of rectangular microstrip antennas," IEEE Trans . Antennas Propag., vol AP-30, no.6, pp.1191-1196, Nor.1982 .

[3]S.J. weiss and O.Kilic, "A vector Transform solution Procedure for solving Electromagnetic Problems in Cartesian Coordinates," IEEE Trans. Antennas Propag, vol.9, 2010.

[4]S.Weiss and W.Kahn, "Decomposition of electromagnetic boundary conditions at planar interfaces with applications ro TE. And TM Field solutions," IEEE Trans. Antennus Propag., vol. 46, no.11, pp. 1687-1691, Nov.1998.

[5]W.Chew and T.Habushy, "The use of vector transforms in Solving some electromagnetic scaltering Problems," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-34, no:7, pp.871-879, Jul.1986.

[6]S.weiss, A vector Transform for use in solving electromagnetic Problems in Cartesian coordinates," in proc, Eu CAP, Mar.2009, PP. 2507-2510.

[7]K.A. Michalski, "Missing boundary conditions of electromagnetic," Electron. Left., vol.22, no.17, pp.921-922, Aug.1986.

پیوست

الف) دو اتحاد برداری دو بعدی مفید ، در این مقاله استفاده شده است . نتایج به راحتی از دو اتحاد برداری شناخته شده زیر حاصل می شوند :

$$\nabla.(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}.(\nabla\times\bar{A}) - \bar{A}.(\nabla\times\bar{B}) \quad \text{(الف-۲)}$$

$$\nabla.(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{A}(\nabla.\bar{B}) - \bar{B}(\nabla.\bar{A}) + (\bar{B}.\nabla)\bar{A} - (\bar{A}.\nabla)\bar{B} \quad \text{(الف-۲)}$$

در روابط زیر ، اگر $\bar{B} = \bar{z}_0 B_z + \bar{B}_t, \bar{A} = \bar{z}_0$ ،

دو رابطه فوق ، به صورت زیر در خواهد آمد :

$$\nabla_t.(\bar{z}_0\times\bar{B}_t) = -\bar{z}_0.(\nabla_t\times\bar{B}_t) \quad \text{(الف-۳)}$$

$$\nabla_t\times(\bar{z}_0\times\bar{B}_t) = \bar{z}_0.(\nabla_t.\bar{B}_t) \quad \text{(الف-۴)}$$