دانشگاه زنجان

دانشکده مهندسی

گروه برق

پایان نامه کارشناسی

گرایش : الکترونیک

عنوان : طراحی و شبیه سازی FFT با استفاده از ابزار های FPGA

(پیاده سازی روش Radix-4-1024 point با استفاده از نرم افزار ISE شرکت Xilinx)

استاد راهنما : دکتر وحید رشتچی

نگارش : ایوب ساجدی

تاریخ دفاعیه : شهریور 92

با تشکر از استاد گرانقدر دکتر وحید رشتچی که بنده را با دنیای علم الکترونیک دیجیتال آشنا کرد

فهرست

فصل اول

فصل دوم

فصل اول) تبدیل فوریه سریع و کاربرد های آن

آنچه در این فصل می خوانیم :

- کلیات تبدیل فوره سریع
  - تعریف
  - الگوریتم و سرعت
  - دقت و تقریب
- انواع روش های تبدیل فوریه سریع
  - تبدیل فوریه سریع Radix-2
  - تبدیل فوریه سریع Radix-4
  - تبدیل فوریه سریع Split-Radix
  - مقایسه سه روش Radix-2، Radix-4، Split-Radix
- دو نمونه جالب از کاربرد های تبدیل فوریه سریع
  - حذف نویز در عملیات پیش پردازش تصاویر ماهواره ای با استفاده از تکنیک تبدیل فوریه سریع
  - استفاده از پردازش صدا وتبدیل فوریه سریع وشبکه های عصبی در سورتینگ پسته

بخش 1-1) کلیات تبدیل فوریه

بخش 1-1-1) تعریف :

تبدیل سریع فوریه (Fast Fourier transform – FFT) نام الگوریتمی‌ست برای انجام تبدیلات مستقیم و معکوس گسسته فوریه به صورتی سریع و بسیار کارآمد. تعداد زیادی الگوریتم‌های تبدیل فوریه سریع مجزا وجود دارد که شامل محدوده عظیمی از ریاضیات می‌شوند: از محاسبات ساده به وسیله اعداد مختلط تا نظریه اعداد.این فصل یک چشم اندازی است به تکنیک‌های موجود و برخی ویژگی‌های عمومی آن‌ها.یک تبدیل فوریه سریع تجزیه یک رشته از مقادیر به مولفه‌هایی با فرکانس‌های متفاوت است. این عملیات در بسیاری از رشته‌ها مفید است (ویژگی‌ها و کاربردهای تبدیل فوریه سریع را در بخش 1-3 مشاهده کنید.) اما محاسبه مستقیم آن از تعریف گاهی اوقات در عمل بسیار کند است. تبدیل فوریه سریع یک راه برای محاسبه همان نتایج به طور سریع تر است؛ محاسبه تبدیل فوریه گسسته برای n نقطه با استفاده از تعریف $O(n^2)$عملیات ریاضی نیاز دارد در حالی که تبدیل فوریع سریع می‌تواند همان نتایج را در O(nLog n)عملیات، محاسبه نماید.این تفاوت در سرعت می‌تواند بسیار چشمگیر باشد، مخصوصا برای مجموعه داده‌های بزرگ. در جایی که n ممکن است در عمل هزاران یا میلیون‌ها باشد، زمان محاسبه در برخی موارد می‌تواند به اندازه چند مرتبه کاهش پیدا کند و بهبود آن در حدود n/Log nمرتبه‌است. این بهبود عظیم موجب شده تا بسیاری از الگوریتم‌های عملی تبدیل فوریه گسسته را به صورت تبدیل فوریه سریع پیاده سازی نمایند. بنابراین تبدیل فوریه سریع در محدوده متنوعی از کاربردها از پردازش سیگنال دیجیتال و حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی(پاره‌ای) تا ضرب مقادیر بزرگ صحیح به کار می‌رود.بنا براین نمونه ای از کاربرد های مهم تبدیل فوریه سریع عبارتند از:

1. آنالیز طیف : استفاده برای شناسایی سیگنال ها
2. کدینگ : سیگنال های صوتی و صحبت اغلب در حوزه فرکانس با استفاده از متغیر های FFT کد می شوند.
3. کاربرد هایی مانند OFDM برای پخش دیجیتال تلوزیون(DVB)و پخش دیجیتال رادیو(DAB).
4. کاهش نویز در سیگنال های تلفن همراه.

بخش 2-1-1) الگوریتم و سرعت :

تبدیل فوریه سریع تبدیل فوریه گسسته را محاسبه می‌کند و دقیقا همان نتایجی را تولید می‌کند که مستقیما با تعریف تبدیل فوریه گسسته به دست می‌آید تنها تفاوت آن این است که بسیار سریع تر است.

اگر ما از یک سیگنال نمونه گیری کنیم و آن را x_n بنامیم تبدیل فوریه گسسته عبارتند از :

$$X_p = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{-j\frac{2\pi}{N}np}, \quad p \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

در نظر می گیریم

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

داریم

$$X_p = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \times W^{np}, \quad p \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

شکل 1-2-1-1

این معادله میتواند به صورت ماتریسی نیز نوشته شود :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 \cdots & W^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \; \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} \cdots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } N*N} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

اعدادمختلط می توانند به صورت اف لاین محاسبه و ذخیره بشوند

شکل 2-2-1-1

بنابراین برای یک رشته از نمونه ها به طول N ،تعداد عملیات ریاضی ای که به صورت مستقیم با استفاده از DFT انجام می شود برابر است با : N^2. یعنی برای N=1000 نیاز به یک میلیون عملیات است!

بنابراین در اینجا بود که نیاز به سریع تر محاسبه کردن DFT به وجود آمد و کولی و توکی در حدود سال 1965 الگوریتم تبدیل فوریه سریع را ارائه کردند.این الگوریتم طوری کارآمد بود که به طور گسترده در پردازش صوت،مخابرات و... مورد استفاده قرار می گیرد.تعداد روش هایی که در امروزه برای FFT استفاده می شود زیاد است اما یکی از پایه ای ترین و پر کاربرد ترین آنها Radix-2 است که در اینجا به صورت نسبتا کامل روابط را اثبات کرده و توضیح داده می شود و در بخش بعدی بیشتر به مقایسه روش های Radix-2 و Radix-4 و Split-Radix می پردازیم.

حال رابطه اصلی DFT را به دو بخش زوج و فرد تقسیم می کنیم :

$$X_p = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{-j\frac{2\pi}{N}np}$$

زوج　　　　　　　　　　　　　　　　فرد

$$X_p = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} \, e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n)p} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)p} \quad (*)$$

بیرون می کشیم

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} + e^{-j\frac{2\pi}{N}p} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np}$$

$$= A_p + W^p B_p$$

بنابراین

$$\boxed{\begin{aligned} A_p &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} \\ B_p &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} \\ W &= e^{-j\frac{2\pi}{N}} \end{aligned}}$$

شکل 3-2-1-1

بنابراین داریم :

$$\boxed{\begin{aligned} A_p &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} \\ B_p &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} \end{aligned}}$$

شکل 1-1-2-4

دقت شود که A_p و B_p های DFT ،N/2 نقطه ای هستند. همانطور که می دانیم تبدیل فوریه گسسته در حوزه فرکانس متناوب می باشد که در اینجا مقدار تناوب برابر N/2 است که این خود باعث ساده سازی بیشتری می شود.بنابراین این بار ما $X_{p+N/2}$ را به دو بخش زوج و فرد تقسیم می کنیم:

$$X_{p+N/2} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}n(p+N/2)} + e^{-j\frac{2\pi}{N}(p+N/2)} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}n(p+\frac{N}{2})}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}n(p+N/2)} = e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np}, \quad e^{-j\frac{2\pi}{N}(p+N/2)} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}p}$$

شکل 1-1-2-5

و در ادامه :

ساده سازی

$$X_{p+N/2} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} - e^{-j\frac{2\pi}{N}p} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np}$$

$$= A_p - W^p B_p$$

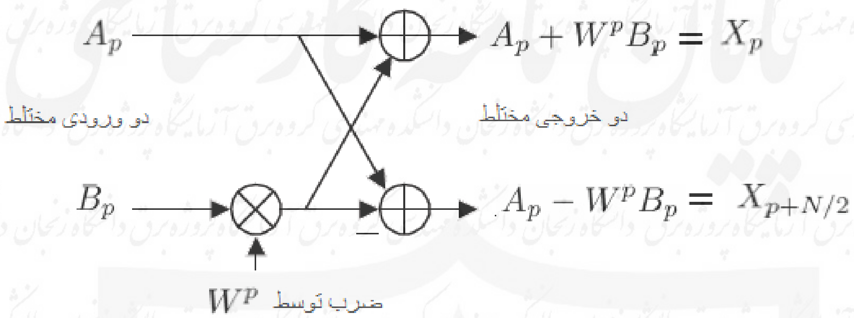
$$\boxed{\begin{aligned} A_p &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} \\ B_p &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}np} \\ W &= e^{-j\frac{2\pi}{N}} \end{aligned}}$$

بنابراین برای X_p
و $X_{p+N/2}$ داریم

$$\boxed{X_p = A_p + W^p B_p} \quad \boxed{X_{p+N/2} = A_p - W^p B_p}$$

شکل 1-1-2-6

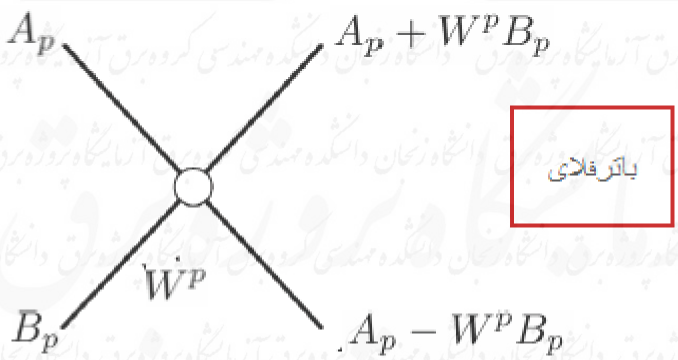
که این در واقع تعریف ساختار باترفلوی FFT است :



شکل 1-1-2-7

یا به شکلی دیگر :

$$\boxed{X_p = A_p + W^p B_p, \quad X_{p+N/2} = A_p - W^p B_p}$$



شکل 8-2-1-1

با توجه به اینکه A_p و B_p فقط لازم است به ازای $p=0,2,...,N/2-1$ محاسبه شودبنابراین برای محاسبه ی هر دوی $X_{p+N/2}$ و X_p مورد استفاده قرار می گیرد.

از این روابط به دست می آید که تعداد ضرب وجمع مورد نیاز برابر $N^2/2$ است که نصف محاسباط DFTرا دارد .

حال برای روشن شدن بیشتر مطلب یک نمونه عرض خواهد شد.اگر نمودار یک DFT 8نقطه ای را در نظر بگیریم به طوری که نقاط زوج و فرد را جدا کرده باشیم نیاز به 2 تا DFT 4نقطه ای به جای یک 8DFTنقطه ای است که محاسبات با این روش در قسمت قبل نشان داده شد که کاهش می یابد. اما برای کاهش بیشتر محاسبات فرض می کنیم که N/2 عددی زوج است . پس می توان هر کدام از DFT های 4 نقطه ای را به 2 DFT 2 نقطه ای تقسیم کرد.بنابراین داریم :

مراجع

[1]Elena Punskaya,Fast Fourier Transform ,PDF,www.sigproc.eng.cam.ac.uk

[2] سید جوادسجادی،احمد غضنفری،امین رستمی-استفاده از پردازش صدا و شبکه های عصبی در سورتینگ پسته-دانشگاه فردوسی مشهد-مجموعه مقالات پنجمین کنگره ملی مهندسی ماشین های کشاورزی ومکانیزاسیون.

[3] مهیار سلطانی،حذف نویز در عملیات پیش پردازش تصاویر ماهواره ای با استفاده از تکنیک تبدیل فوریه سریع-www.msoltani.persianblog.ir

[4]علی - اسلامی راد , سید مهدی - ناظمی, تصویر سازی رقومی (تئوری و کاربرد ها), سازمان نقشه برداری کشور, 1378

[5]: محمد - نجفی دیسفانی , پردازش کامپیوتری تصاویر سنجش از دور , انتشارات سمت, 1377

[6]: ماهیار - سلطانی , مطالعه ولکانیسم پلیوکواترنر جنوب و جنوب غرب استان یزد با استفاده از پردازش تصاویر رقومی ماهواره ای , پایان نامه کارشناسی ارشد پترولوژی , دانشگاه اصفهان , 1376

[7]- pratt, w.k. Digital Image processing ,2nd edition. New York :John Wiley &Sons,1991

[8]- Foley , J.D., and Van Dam ,A. Fundamental of Interactive Computer Graphics,2nd edition .Readings, Mass.:Addison -Wesley 1990.